無限の遅れを持つ関数微分方程式の基本行列 (関数微分方程式)

内藤, 敏機

数理解析研究所講究録
379巻 1980年 70-91

無限の遅れを持つ関数微分方程式の基本行列

電通大　　内藤　敏機

§0　標題の方程式の線形系

$$\frac{dx}{dt} = L(t, x_t) + h(t) \tag{0.1}$$

の解の表現について考察する。線形常微分方程式系の解は、基本行列を用いて、所謂定数変化法で表わされる。有限の遅れを持つ線形関数微分方程式系に対しても、定数変化法が拡張されており、基本行列 $X(t,\sigma)$ が定義されている。これは初期条件 $X(t,\sigma) \equiv 0$ for $t < \sigma$ and $X(\sigma,\sigma) = I$ (単位行列)の下での、方程式

$$\frac{dX}{dt} = L(t, X_t) \qquad t \geq \sigma \tag{0.2}$$

の解である。有限遅れの場合、方程式の相空間はある $r > 0$ (有限)を決めて連続関数の空間 $C = C([-r,0], \mathbb{C}^n)$ とするのが普通であり、解は $t \geq \sigma$ で連続だからそうする理由もあ

る。一方基本行列の初期条件となる関数 X_σ は不連続であり、この相空間に属さない。しかし Riesz の表現定理により、連続関数の空間 C 上で定義された連続線形汎関数は Stieltjes 積分で表わされる。$\sigma \le t \le \sigma + r$ に対し X_t は C に属さないが、この積分によって $L(t, X_t)$ が定義され、方程式 (0.2) が意味を持つ。

今から考える無限遅れの方程式系の相空間 $\mathcal{B}$ は、次節で公理的に定義される。それによって $(-\infty, 0]$ 上で連続な compact 台を持つ関数の族 $\mathcal{C}$ が相空間 $\mathcal{B}$ の部分集合となる。だから $L(t, \cdot)$ は $\mathcal{C}$ 上で意味を持つが、これは $(-\infty, 0]$ 上で定義された有界 Borel 可測で compact 台の関数の族 Γ の上にまで延長される。これを $\tilde{L}(t, \cdot)$ で表わすと、無限遅れの場合も基本行列の方程式は (0.2) で L を $\tilde{L}$ で置きかえたものと考えられる。実際そうしてうまく行き、有限遅れの場合の議論に併行した議論で、方程式系 (0.1) に対して定数変化法の公式が得られる。ただ無限遅れの場合は、初期時刻 σ よりどれだけ時間が過ぎても X_t は $\mathcal{B}$ に属さないかも知れない。たとえば $\mathcal{B}$ として $(-\infty, 0]$ で連続で $\lim_{\theta \to -\infty} \varphi(\theta) e^{\gamma\theta}$ の存在する関数 φ の全体を考えれば、この事が起る。有限遅れの場合は X は系 (0.2) を $t \ge \sigma + r$ のすべての時刻で満すが、無限遅れの場合は、$[\sigma, \infty)$ のほとんどすべての t において

$dX/dt = \tilde{L}(t, X_t)$ となるだけである。

自励系はすでに[8, 9]で調べられているが，Laplace変換が用いられて，いささか迂遠である。定数変化法の公式は，そんな事をせずとも出てくる訳である（定理3.6）。ただこの稿の順序で議論を進めると，基本行列の $t \to \infty$ のときのorderが指数関数的であることを示せるかどうか疑問である（定理3.1）。そうすると基本行列のLaplace変換が特性行列の逆行列であることを示すのに困る。しかし[8, 9]では特性行列の逆行列のLaplace逆変換として X を定義し，色々な欲しい結果を導いている。

有限遅れの場合の基本行列についてはReferences [1, 3, 6, 7]を参照されたい。無限遅れの方程式の相空間に関しては[4, 10]が基本的で，[5]では少し修正して整理されている。積分の延長理論は[11]で丁寧に述べてある。[2]は積分順序の交換に際し，しばしば利用される。

§1 関数空間 $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, Γ. 関数 $x : (-\infty, A) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ があるとき，関数 $x_t : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}^n$（但し $t < A$）を，関係式 $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ for $\theta \leqq 0$ によって定義する。方程式系(0.1)を考える時，x_t の属する相空間 $\mathcal{B}$ と，それに関連する空間 $\mathcal{C}$, Γ を定義する。

$\mathcal{B}$は$(-\infty, 0]$をn次元複素Banach space $\mathbb{C}^n$に写す関数のある族で、線形空間であり、あるsemi-norm $|\cdot|_{\mathcal{B}}$が定義されており、次の様な条件を満すとする。

(H_1)　区間$(-\infty, \sigma+A)$, $A>0$, を$\mathbb{C}^n$に写す関数xが$[\sigma, \sigma+A)$で連続で$x_\sigma \in \mathcal{B}$を満せば、$[\sigma, \sigma+A)$のtに対し$x_t \in \mathcal{B}$となり、x_tはtの連続関数となる。

(H_2)　ある正値非減少関数$K(t)$, $t \geqq 0$, と、正値で局所有界関数$M(t)$, $t \geqq 0$, があって、(H_1)で考えたxに対し

$$|x_t|_{\mathcal{B}} \leqq K(t-\sigma) \sup_{\sigma \leqq s \leqq t} |x(s)|_{\mathbb{C}^n} + M(t-\sigma)|x_\sigma|_{\mathcal{B}}$$

が、$t \geqq \sigma$に対して成立つ。

(H_3)　ある$K>0$が存在し、任意の$\phi \in \mathcal{B}$に対し

$$|\phi(0)|_{\mathbb{C}^n} \leqq K|\phi|_{\mathcal{B}}.$$

$\mathcal{C}$は$(-\infty, 0]$を$\mathbb{C}^n$に写すcompact台を持つ連続関数の全体からなる線形空間とする。Γは$(-\infty, 0]$を$\mathbb{C}^n$に写すcompact台を持ち，有界でBorel可測な関数全体からなる線形空間とする。もちろん$\mathcal{C}$はΓに含まれる。また上記(H_1)によって、$\mathcal{C}$は$\mathcal{B}$にも含まれる。しかしΓと$\mathcal{B}$との関係は、何も仮定しない。

次節に進む前に、$\mathcal{B}$上の半群$S(t)$, $t \geqq 0$, を定義する。

すなわち $\phi \in \mathcal{B}$ に対して，$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を $x_0 = \phi$ かつ $x(t) = \phi(0)$ for $t > 0$ とおき，$S(t)\phi = x_t$, $t \geqq 0$ とするのである。(H_1) から $S(t)$ は確かに $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}$ に写し，ϕ を止めたとき $S(t)\phi$ は t について連続となる．(H_2) によって，t を止めたとき $S(t)$ は $\mathcal{B}$ 上の有界線形作用素で，そのノルム $|S(t)|$ は局所有界である。Hille-Phillips の教科書 p. 306 にある如く $|S(t)|$ は下半連続となり Borel 可測である。

§2 線形作用素の表現定理．前節で定義した空間 $\mathcal{B}$ から $\mathbb{C}^n$ への連続線形作用素 L の積分表現を考える．上記のように $\mathcal{C}$ は $\mathcal{B}$ に含まれるから，$\phi \in \mathcal{C}$ に対し $L(\phi)$ は意味を持つ。今，$\operatorname{supp}\phi \subset [-r, 0]$ ならば条件 (H_2) によって

$$|L(\phi)|_{\mathbb{C}^n} \leqq K(r) \sup_{-\infty < \theta \leqq 0} |\phi(\theta)|_{\mathbb{C}^n}.$$

したがって L の $\mathcal{C}$ への制限 L_0 は，空間 $(-\infty, 0]$ 上の Radon 測度である [11]．L_0 は Γ の上に次の意味で延長される．まず Γ の関数列 $\{\phi^n\}$ が ϕ に Lebesgue 収束するとは，$\{\phi^n(\theta)\}$ が一様有界で，ϕ^n の台が n に無関係な一定の compact set に含まれ，各点 θ で $\phi^n(\theta)$ が $\phi(\theta)$ に収束することとする．また $\{\phi^n\}$ が ϕ に Lebesgue 収束すれば $\mu(\phi^n)$ が $\mu(\phi)$ に

収束するような線形作用素 $\mu : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は Lebegue 連続であるという。そうすると $(-\infty, 0]$ 上の $\mathbb{C}^n$ の値をとる Radon 測度は，Γ 上の Lebesgue 連続な線形作用素に一意的に延長される（[11] を見よ．和訳"シュヴァルツ解析学" 東京図書 第3巻，pp. 123－128）．したがって次の定理が成りたつ。

定理 2.1. 空間 $\mathcal{B}$ を $\mathbb{C}^n$ に写す連続線形作用素 L から次のような Γ から $\mathbb{C}^n$ への線形作用素 $\tilde{L}$ が唯一つ決まる：

(i) $\tilde{L}(\phi) = L(\phi)$ for $\phi \in \mathcal{C}$.

(ii) $\tilde{L}$ は Lebesgue 連続である。

このような $\tilde{L}$ の存在を知れば，ある特殊な関数 ϕ に対し $L(\phi)$ の積分表現は容易に導かれる。そのために，$(-\infty, 0)$ において 0，$[0, \infty)$ において 1 の値をとる関数を χ とおく。明きらかに，$t \geqq 0$ に対して χ_t は空間 $(-\infty, 0]$ 上での，区間 $[-t, 0]$ の定義関数（indicator function）である。I を $n \times n$ 単位行列として，$n \times n$ 行列関数 $\eta(\theta)$, $\theta \leqq 0$, を

$$\eta(\theta) = \begin{cases} -\tilde{L}(\chi_{-\theta} I) & \text{for } \theta < 0 \\ 0 & \text{for } \theta = 0 \end{cases}$$

によって定義しよう。このとき次の定理が成立つ（[11]，和訳 4巻，定理95及び定理102も見よ）。

<u>定理2.2</u>([9]). 上記の η は $(-\infty,0]$ の任意の有界区間 $[-t,-s]$, $t>s\geqq 0$, で有界変分でその全変分は

$$var(\eta,[-t,-s]) \leqq c|L|K(t-s)|S(s)|$$

と評価される，但し c は $\mathbb{C}^n$ のノルムに依存する定数である。関数 $\phi:(-\infty,0]\to\mathbb{C}^n$ が，$(-r,0]$ で連続，$-r$ で右連続で，$(-\infty,-r)$ では恒等的に 0 ならば，

$$\tilde{L}(\phi) = \int_{-r}^{0} d\eta(\theta)\phi(\theta).$$

特に

$$L(\phi) = \int_{-\infty}^{0} d\eta(\theta)\phi(\theta) \quad \text{for } \phi\in\mathcal{C}.$$

§3　非自励線形関数微分方程式系の基本行列と解の表現

実数 t を parameter とする空間 $\mathcal{B}$ を $\mathbb{C}^n$ に写す線形作用素の族 $L(t)$ が次の条件を満すとする：そのノルム $|L(t)|$ は $\mathbb{R}$ の有界区間で有界で，各 $\phi\in\mathcal{B}$ に対し $L(t)\phi$ は t の連続関数である。記号 $L(t,\phi)$ は $L(t)\phi$ を表わすとする。$\mathbb{R}^2$ の (t,θ) に対し $n\times n$ 行列 $\eta(t,\theta)$ を

$$\eta(t,\theta) = \begin{cases} -\tilde{L}(t, \chi_{-\theta} I) & \text{if } \theta<0 \\ 0 & \text{if } \theta\geqq 0 \end{cases}$$

とおく．定理2.2によって，これはtを固定したときθに関して局所有界変分である．その上(t,θ)に関して$\mathbb{R}^2$上でBorel可測である．実際，$(-\infty,-\frac{1}{n}]$では0，$[0,\infty)$では1で$[-\frac{1}{n},0]$では一次式で表わされる連続関数をχ^n, $n=1,2,\cdots$, とおくと，$\theta<0$に対して$\chi^n_{-\theta}$は$\chi_{-\theta}$にLebesgue収束する．よって$\theta<0$に対して，$\tilde{L}(t,\chi^n_{-\theta}I)$は$\tilde{L}(t,\chi_{-\theta}I)$に収束する．他方定理2.1によって$\tilde{L}(t,\chi^n_{-\theta}I)$は$L(t,\chi^n_{-\theta}I)$に等しく，後者は$L(t)$に対する仮定から$(t,\theta)\in\mathbb{R}\times(-\infty,0)$において連続である．連続関数の極限関数として$\tilde{L}(t,\chi_{-\theta}I)$は$\mathbb{R}\times(-\infty,0)$でBorel可測であり，したがって$\eta(t,\theta)$は$\mathbb{R}^2$でBorel可測である．

定理3.1．未知関数xの方程式

(3.1)．
$$x(t)=x(\sigma)+\int_\sigma^t\tilde{L}(s,x_s)ds \qquad t>\sigma$$

は，各$\phi\in\Gamma$に対して$x(t)=\phi(t-\sigma)$ for $t\leqq\sigma$であるような局所絶対連続な解$x(t,\sigma,\phi)$を区間$[\sigma,\infty)$において唯一つ持つ．またCを定理2.2で述べた定数として，このとき$\operatorname{supp}\phi\subset[-r,0]$ならば，任意の$t\geqq\sigma$に対して次の不等式がなりたつ：

$$
\begin{aligned}
&|x(t,\sigma,\phi)|_{\mathbb{C}^n} \\
&\leqq |\phi(0)|_{\mathbb{C}^n}\cdot c\exp\int_\sigma^t |L(s)|K(s-\sigma)ds \\
&\quad+\sup_{\theta<0}|\phi(\theta)|_{\mathbb{C}^n}\cdot cK(r)\int_\sigma^t |L(s)||S(s-\sigma)|\left\{\exp\int_s^t |L(u)|K(u-\sigma)du\right\}ds.
\end{aligned}
$$

証明．逐次近似法で証明すればよいが，$\tilde{L}(s,x_s)$ の可測性が問題となる．まず関数 $y:(-\infty,\sigma+A]\longrightarrow\mathbb{C}^n$ が $[\sigma,\sigma+A]$ で連続で，$y_\sigma=\phi$ が Γ に属すれば，$\tilde{L}(t,y_t)$ は $t\in[\sigma,\sigma+A]$ に関して Borel 可測であると言おう．より詳しく，ϕ が α 階級の Baire 関数ならば，$\tilde{L}(t,y_t)$ は高々 α 階級の Baire 関数である．実際，ϕ が 0 階級即ち連続な関数ならば，定理 2.1 により $\tilde{L}(t,y_t)=L(t,y_t)$ であり，$L(t)$ に関する仮定によって，これは t の連続関数である．ところで超限帰納法によって次の 2 補題が証明される．第一に，関数 $\phi:(-\infty,0]\longrightarrow\mathbb{C}^n$ が α 階級ならば，区間 $[-t,-s]$，$t>s\geqq 0$，への ϕ の制限も高々 α 階級であり，逆にその制限が α 階級で，その上 $(-\infty,-t]$ 及び $[-s,0]$ では連続なら，ϕ は $(-\infty,0]$ で高々 α 階級である．第二に，定数 $M>0$ に対して，$|\phi(\theta)|<M$ のときは $\phi^M(\theta)=\phi(\theta)$，$|\phi(\theta)|\geqq M$ のときは $\phi^M(\theta)=(M/|\phi(\theta)|)\cdot\phi(\theta)$ とおいて，関数 $\phi^M:(-\infty,0]\longrightarrow\mathbb{C}^n$ を定義すると，ϕ が α 階級ならば，ϕ^M は高々 α 階級である．本来の命題にもどり，Γ に属する ϕ が β 階級とし，$\alpha<\beta$ なる順序数 α に対し命題が成立つと

する．このときβより低い階級の関数の列$\{\phi^n\}$が存在して，各点で$\phi^n(\theta)$は$\phi(\theta)$に収束する．上記第一補題によりϕ^nの台は一定のcompact setに含まれると仮定できる．$t \leqq \sigma$においては$y^n(t)=\phi^n(t-\sigma)$で，$[\sigma, \sigma+A]$では連続な関数$y^n(t)$を作って，各点で$y^n(t)$が$y(t)$に収束するようにできる．　同じ補題によってy^n_t，$\sigma \leq t \leq \sigma+A$，はすべて$\beta$より低い階級であるが，第二補題によってこれらは一様有界であるとしてよい．$\hat{L}(t)$のLebesgue連続性から，$\hat{L}(t, y^n_t)$は$\hat{L}(t, y_t)$に収束する．一方帰納法の仮定から，$\hat{L}(t, y^n_t)$はすべてβより低い階級であるから，$\hat{L}(t, y_t)$は高々β階級のBaire関数である．

次に上と同じyに対し，$\hat{L}(t, y_t)$は$t \in [\sigma, \sigma+A]$で有界である．実際，$u(t)$を$t<\sigma$では恒等的に0で，$t \in [\sigma, \sigma+A]$に対しては$y(t)$に等しくとり，また$t \leqq \sigma+A$に対し，$y(t) = u(t)+v(t)$とおいて$v(t)$を定義すると，$\hat{L}(t, y_t) = \hat{L}(t, u_t)+\hat{L}(t, v_t)$と分解される．$|\hat{L}(t, u_t)|$は$\sup\{|u_t(\theta)|: -(t-\sigma) \leq \theta \leq 0\}$と$var(\eta, [-(t-\sigma), 0])$の積で上からおさえられるが，定理2.2によって次のように書きかえられる：

$$(3.2) \quad |\hat{L}(t, u_t)| \leqq \left(\sup_{\sigma \leq \theta \leq t} |y(\theta)|\right) \cdot c\, |L(t)|\, K(t-\sigma).$$

また$\sup\{|v_t(\theta)|: \theta \leqq 0\} = \sup\{|\phi(\theta)|: \theta < 0\}$であり，

ϕ の台が $[-r, 0]$ に含まれると v_t の台は $[-(t-\sigma)-r, -(t-\sigma)]$ に含まれるから，

(3.3) $|\tilde{L}(t, v_t)| \leqq \sup_{\theta<0} |\phi(\theta)| \cdot c\, |L(t)|\, K(r)\, |S(t-\sigma)|$

したがって $|L(t)|, K(t), |$ に対する仮定から，$\tilde{L}(t, y_t)$ は $[\sigma, \sigma+A]$ において有界である．

さて解の逐次近似列 $x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, を次の様に構成する．$t \leqq \sigma$ に対しては，$x^n(t) = \phi(t-\sigma)$, $n=0,1,2,\cdots$ とおく．$t > \sigma$ に対しては $x^0(t) \equiv \phi(0)$ とおくと，上記の考察から，$\tilde{L}(t, x^0_t)$ は局所有界な Borel 可測関数である，但し $t \geqq \sigma$．以下 $n \geqq 1$ に対し帰納的に

$$x^n(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t \tilde{L}(s, x^{n-1}_s)\, ds \qquad t > \sigma$$

とすると，これは意味を持ち x^n は $[\sigma, \infty)$ で連続である．

今，$A(t) = |L(t)|K(t-\sigma)$, $B(t) = |L(t)|\,|S(t-\sigma)|$, $c_1 = c\,|\phi(0)|$, $c_2 = c\,K(r) \sup\{|\phi(\theta)| : \theta < 0\}$ とおくと (3.2) と (3.3) とを使って，$t \geqq \sigma$ に対し $|\tilde{L}(t, x^0_t)| \leqq c_1 A(t) + c_2 B(t)$ となる．したがって

$$|x^1(t) - x^0(t)| \leqq c_1 \int_\sigma^t A(s)\, ds + c_2 \int_\sigma^t B(s)\, ds \qquad t \geqq \sigma$$

が成立つ．$n=1,2,\cdots$ に対し $x^n(t) - x^{n-1}(t)$ は $t \leqq \sigma$ では

0となり．これは $\mathbb{R}$ で連続な関数である．ゆえに定理2.1から $|\tilde{L}(s, x^n_s - x^{n-1}_s)| = |L(s, x^n_s - x^{n-1}_s)|$ となり．この右辺は $|L(s)|\,|x^n_s - x^{n-1}_s|_{\mathcal{B}}$ で上からおさえられ，更に (H_2) を使うと．$A(s)\sup\{|x^n(u) - x^{n-1}(u)| : \sigma \leq u \leq s\}$ 以下である．これを使って．$n=1,2,\cdots$ に対して．

$$
\begin{aligned}
|x^n(t) - x^{n-1}(t)| \leq{}& C_1 \frac{1}{n!}\left\{\int_\sigma^t A(s)\,ds\right\}^n \\
&+ C_2 \int_\sigma^t B(s)\frac{1}{(n-1)!}\left\{\int_s^t A(u)\,du\right\}^{n-1} ds \qquad t \geq \sigma
\end{aligned}
$$

であることが帰納的に示される。

ゆえに $\{x^n(t)\}$ は $[\sigma, \infty)$ で局所一様収束する．極限関数を $x(t)$ とおけば，有界収束の定理によってこれが望む解であると言える．不等式 $|x^n(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x^k(t) - x^{k-1}(t)| + |\phi(0)|$ と．上記評価式を組合せ．$n \to \infty$ のときの極限を考えれば．定理に述べた評価式が導き出される．解の一意性は Gronwall 不等式によって直接証明できる，

この定理から，$t < \sigma$ に対して恒等的に0行列に等しく，$t = \sigma$ において単位行列 I に等しいような，方程式(3.1)の行列解 $X(t, \sigma)$ が唯一つ存在する。これを関数微分方程式(0.2)の基本行列とよぶ。したがって．定理2.2より

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t,\sigma) = \int_{-(t-\sigma)}^{0} d_\theta[\eta(t,\theta)]\, X(t+\theta,\sigma) \qquad \text{a.e. in } t \geqq \sigma$$
$$= \int_{\sigma}^{t} d_s[\eta(t,s-t)]\, X(s,\sigma)$$

が成立ち．また

$$|X(t,\sigma)| \leqq c|I| \exp\int_{\sigma}^{t} |L(s)|\, K(s-\sigma)\, ds \qquad t \geqq \sigma$$

と評価される．したがって(0.2)が自励系であっても．関数 $K(t)$ の増大するorderを知らなければ．この式から $|X(t,\sigma)|$ が指数関数的に増加するとは結論できない．

次に随伴系を考えよう．

<u>定理3.2.</u> t はある実数，b は n 次横ベクトルとする．この時．s を変数とする n 次横ベクトル関数 $y(s)$ の方程式

$$(3.4)\quad y(s) + \int_{s}^{t} y(\alpha)\, \eta(\alpha, s-\alpha)\, d\alpha = b \qquad s \leqq t$$

は．$(-\infty, t]$ において局所有界変動な解を唯一つもつ．その全変分は．$s<t$ に対して次のように評価される：

$$\mathrm{var}(y,[s,t]) \leqq |b| \left[\exp\left\{\int_{s}^{t} c|L(\alpha)|\, K(\alpha-s)\, d\alpha\right\} - 1\right].$$

<u>証明.</u> これも逐次近似法で示される．n 次横ベクトル関数 $u(s)$，$s \leqq t$，がBorel可測で局所有界ならば，

$$v(s) = \int_s^t u(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,d\alpha$$

は，$(-\infty, t]$において意味を持ち，関数vは局所有界変動であることをまず見よう．実際，$\eta(t,\theta)$は(t,θ)のBorel可測関数だから，$\eta(\alpha, s-\alpha)$はαのBorel可測関数である．定理2.2から$\eta(t,\theta)$のθに関するcompact区間での全変分は，tがcompact区間を走るとき一様有界となる．ゆえに特に$\eta(t,\theta)$は$\mathbb{R}^2$で局所有界である．これより$u(\alpha)\eta(\alpha, s-\alpha)$は$\alpha$に関してBorel可測となり，$\alpha\in[s,t]$に対して有界である．よって上記積分は可能である．$t$より小さい$\sigma$を1つ固定しよう．$\eta(t,\theta)=0$ for $\theta\geqq 0$であることに注意すると，$v(s)$の定義式は$s\in[\sigma,t]$に対して$u(\alpha)\eta(\alpha,s-\alpha)$の$[\sigma,t]$における積分でおきかえられる．ゆえに，$[\sigma,t]$の分割，$\sigma=s_0<s_1<\cdots<s_N=t$に対し，

$$\sum_{j=1}^{N}|v(s_j)-v(s_{j-1})| \leqq \int_\sigma^t |u(\alpha)| \sum_{j=1}^{N} |\eta(\alpha, s_j-\alpha)-\eta(\alpha, s_{j-1}-\alpha)|\,d\alpha$$

である．定理2.2のηの全変分の評価式を使うと，結局

$$\mathrm{var}(v,[\sigma,t]) \leqq c\int_\sigma^t |u(\alpha)||L(\alpha)|K(\alpha-\sigma)\,d\alpha$$

を得る．即ちvは$[\sigma,t]$で有界変分である．有界変分関数は有界でBorel可測であることに注意しよう．

さて，$(-\infty, t]$ 上の局所有界変分関数の列 $\{y^n(s)\}$ を，帰納的に定義する．まず $y^0(s) \equiv b$ for $s \leqq t$ とし，$n=1,2,\cdots$ に対して，関係式

$$y^n(s) = b - \int_s^t y^{n-1}(\alpha)\, \eta(\alpha, s-\alpha)\, d\alpha \qquad s \leqq t$$

によって y^n を定義する．これが意味を持つことが上記の注意によって確かめられる．

$\eta(t, \theta)$ は θ について局所有界変分であるから，局所有界で，$\eta(t, 0) \equiv 0$ に注意すると定理2.2から $|\eta(t, \theta)| \leqq c|L(t)| \times K(-\theta)$ for $\theta \leqq 0$ となる．したがって $|y^1(s) - y^0(s)|$ は $c|b||L(\alpha)|K(\alpha - s)$ を α について $[s, t]$ で積分したもので上からおさえられる．これを使うと次に

$$|y^2(s) - y^1(s)| \leqq \int_s^t c|L(\alpha)|K(\alpha - s) \int_\alpha^t c|b||L(u)|K(u-\alpha)\, du\, d\alpha$$

を得る．$K(t)$ は非減少と仮定されているので，右辺の $K(u-\alpha)$ を $K(u-s)$ で置きかえても不等号は変らない。この置きかえをいつも行うと，$n=1,2,\cdots$ に対し，$s \leqq t$ のとき

$$|y^n(s) - y^{n-1}(s)| \leqq \frac{|b|}{n!}\left\{c\int_s^t |L(u)|K(u-s)\, du\right\}^n$$

であることが帰納的に証明される．この不等式を関係式 $|y^n(s)| \leqq \sum_{k=1}^{n} |y^k(s) - y^{k-1}(s)| + |y^0(s)|$ にもちこめば $n = 0, 1, \cdots$ に対し，

$$|y^n(s)| \leqq |b| \exp\left\{c\int_s^t |L(u)|K(u-s)du\right\} \qquad s \leqq t.$$

ゆえに $\{y^n(s)\}$ は $(-\infty, t]$ で局所一様収束する. 極限関数を $y(s)$ とすれば, $y^n(s)$ の定義式と有界収束の定理を使い, これは定理の方程式の解であることがわかる. y^n はすべて Borel 可測だから y も Borel 可測である. 上記不等式で $n \to \infty$ とすれば $|y(s)|$ の評価式が得られ, $y(s)$ は局所有界変動である. 証明の最初, PP.13~14 の考察から $y(s)$ はしたがって局所有界変動で $u = v = y$ に対し P.14 で得た全変分の評価を適用すると,

$$\operatorname{var}(y, [s,t])$$
$$\leqq c\int_s^t |L(\alpha)|K(\alpha-s)|b| \exp\left\{c\int_\alpha^t |L(u)|K(u-\alpha)du\right\} d\alpha.$$

$K(t)$ は非減少であるから, 右辺の $K(u-\alpha)$ を $K(u-s)$ でおきかえても不等号は変らず, 定理の評価式に達する.

解の一意性は Gronwall 不等式によって証明できる.

方程式系 (3.4) は方程式系 (0,2) の随伴系とよばれる. 定理3.2 から, 実定数 t に対して s を変数とする $n \times n$ 行列 $Y(s,t)$ の方程式系

$$Y(s,t)+\int_s^t Y(\alpha,t)\eta(\alpha,s-\alpha)\,d\alpha = I \qquad s\leqq t$$

は，$(-\infty,t]$において局所有界変動な解を唯一つ持つ．そして，

$$\mathrm{var}(Y(\cdot,t),[s,t])\leqq |I|\left[\exp\int_s^t c|L(\alpha)|k(\alpha-s)\,d\alpha-1\right] \qquad s\leqq t.$$

また，後の計算のため

$$Y(s,t)\equiv 0 \qquad \text{for} \quad s>t$$

と定義する．

局所可積分な関数 $h:[\sigma,\infty)\to \mathbb{C}^n$ をとり，方程式系

$$(3.5)\quad x(t)=\begin{cases} a+\int_\sigma^t \tilde{L}(s,x_s)\,ds+\int_\sigma^t h(s)\,ds & t\geqq\sigma \\ 0 & t<\sigma \end{cases}$$

を考えよう．定理3.1と同様にして，これは$[\sigma,\infty)$で局所絶対連続な解を唯一つもつ．

<u>定理3.3.</u>　系(3.5)の解は次のように表わされる；

$$x(t)=Y(\sigma,t)a+\int_\sigma^t Y(\alpha,t)h(\alpha)\,d\alpha \qquad t\geqq\sigma.$$

<u>証明.</u> Banks [1] と同様の方法で証明できる．実際，$x(\sigma)=a$，$Y(\sigma,\sigma)=I$ に注意して部分積分を行うと

(3.6) $\int_\sigma^t d_\alpha[Y(\alpha,t)]x(\alpha) + \int_\sigma^t Y(\alpha,t)\,dx(\alpha) = x(t) - Y(\sigma,t)a.$

$x(t)$ は (3.5) の解だから，$dx(\alpha) = \{\tilde{L}(\alpha, x_\alpha) + h(\alpha)\}d\alpha$ と置きかえられる．定理 2.2 を使って，$\tilde{L}(\alpha)x_\alpha$ は $\eta(\alpha.\theta)$ を使って Stieltjes 積分で表わされる．即ち

$$\int_\sigma^t Y(\alpha,t)\tilde{L}(\alpha, x_\alpha)\,d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha,t)\,d\alpha\left[\int_{-(\alpha-\sigma)}^0 d_\theta\eta(\alpha.\theta)x(\alpha+\theta)\right]$$

右辺 [ ] 中の Stieltjes 積分において，積分変数を関係式 $s = \alpha+\theta$ によって θ から s に変えると，s の積分区間は $[\sigma, \alpha]$ になるが，$\eta(\alpha, s-\alpha) \equiv 0$ for $s \gneqq \alpha$ であるから，積分区間は $[\sigma, t]$ まで延長しても積分値は変らない．よって上記右辺は $[\sigma,t]\times[\sigma,t]$ における (α, s) に関する積分で表わされる．そして Cameron-Martin [2] により，積分順序を交換すると，結局

$$\int_\sigma^t Y(\alpha,t)\,d\alpha\left[\int_{-(\alpha-\sigma)}^0 d_\theta\eta(\alpha.\theta)\,x(\alpha+\theta)\right] = \int_\sigma^t d_s\left[\int_\sigma^t Y(\alpha,t)\eta(\alpha,s-\alpha)\,d\alpha\right]x(s).$$

右辺の α に関する積分は，$\eta(\alpha, s-\alpha) \equiv 0$，$\alpha \leqq s$，を使って再び $[s.t]$ に縮少される．したがって (3.6) の左辺は

$$\int_\sigma^t d_s\left\{Y(s,t) + \int_s^t Y(\alpha,t)\eta(\alpha,s-\alpha)\,d\alpha\right\}x(s) + \int_\sigma^t Y(\alpha,t)h(\alpha)\,d\alpha$$

に等しいが，Y の満す方程式から才一項は 0 となる．これよ

り定理の結論に達する.

上記定理を $h(t)\equiv 0$ の場合に適用すると次の系が得られる.

系3.4. $X(t,\sigma)=Y(\sigma,t)$ for all $\sigma, t\in\mathbb{R}$.

系3.5. 方程式系(3.5)の解は次のように表わされる:

$$x(t) = X(t,\sigma)\,a + \int_\sigma^t X(t,s)\,h(s)\,ds \qquad t\geqq\sigma.$$

方程式(0.1)にもどろう. $L(t):\mathcal{B}\to\mathbb{C}^n$ は7頁の仮定を満し. $h:[\sigma,\infty)\to\mathbb{C}^n$ は局所可積分とする.

定理3.6. 任意の $\phi\in\mathcal{B}$ に対し $x_\sigma=\phi$ で, 方程式(0.1)をほとんどすべての $t\geqq\sigma$ に対し満す局所絶対連続な解 $x(t,\sigma,\phi,h)$ が唯一つ存在して. 次のように表わされる:

$$x(t,\sigma,\phi,h) = \phi(0) + \int_\sigma^t X(t,s)\,L(s, S(s-\sigma)\phi)\,ds + \int_\sigma^t X(t,s)\,h(s)\,ds \qquad t\geqq\sigma.$$

証明. 解の一意性はGronwall不等式により証明される. ゆえに存在したとすると. 系の線形性により $x(t,\sigma,\phi,h)$

$= x(t, \sigma, \phi, 0) + x(t, \sigma, 0, h)$. $x(t, \sigma, 0, h)$ は L を $\tilde{L}$ で置きかえた方程式系の解となるから、系3.5によって、それは上式右辺第三項で与えられる。簡単のため $x(t) = x(t, \sigma, \phi, 0)$ とおく。関数 $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ を、$y(t) = \phi(0)$ for $t \geq \sigma$, $y(t) = \phi(t-\sigma)$ for $t < \sigma$ により定義すると、$y_\sigma = \phi$ であり $y_t = \mathcal{S}(t-\sigma)\phi$ である。今 $z(t) = x(t) - y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, とおくとこれは $\mathbb{R}$ 上連続で、$t \geq \sigma$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = L(t, z_t) + L(t, y_t)$$

をみたす。$t \geq \sigma$ に対し $z_t \in \mathcal{C}$ であるから $L(t, z_t) = \tilde{L}(t, z_t)$ と置きかえられる。$z_\sigma = 0$ に注意して、系3.5を $h(t) = L(t, y_t)$, $x \equiv z$ に対し適用すると

$$z(t) = \int_\sigma^t X(t, s) L(s, y_s)\, ds \qquad t \geq \sigma.$$

即ち z の方程式は解をもち、それが上の様に表わされる。関係 $x(t) = y(t) + z(t) = \phi(0) + z(t)$, $t \geq \sigma$, にこれを代入すれば、$x(t) = x(t, \sigma, \phi, 0)$ が定理3.6の式の右辺第一項と第二項の和で表わされる。

方程式(0.1)で L を $\tilde{L}$ で置きかえ、初期関数 $\tilde{\phi}$ が $\mathcal{P}$ に属するとすると、その時の解 $\tilde{x}(t, \sigma, \phi, h)$ はやはり

$$\tilde{x}(t,\sigma,\phi,h) = \phi(0) + \int_\sigma^t X(t,s)\tilde{L}(s, S(s-\sigma)\tilde{\phi})ds$$

$$+ \int_\sigma^t X(t,s)h(s)ds \qquad t \geqq \sigma$$

である．定理3.1の証明中で述べた $\tilde{L}(s, S(s-\sigma)\phi)$ の可測性，有界性の判定を思い出せば，上記の証明がそのまま適用できる．特に $\phi \in \mathcal{C}$ ならば，$\tilde{L}(s, S(s-\sigma)\phi)$ を $\eta(s,\theta)$ を使って Stieltjes 積分で表わし計算すると，

$$x(t,\sigma,\phi,h) = X(t,\sigma)\phi(0) + \int_{-\infty}^0 d_\theta \left\{ \int_\sigma^t X(t,s)\eta(s,\theta+\sigma-s)ds \right\} \phi(\theta)$$

$$+ \int_\sigma^t X(t,s)h(s)ds \qquad t \geqq \sigma.$$

Banks [1] と類似の公式が導き出される．

References

[1] H. T. Banks, Representations for solutions of linear functional differential equations, J. Differential Equations, 5(1969), 399-409.

[2] R. H. Cameron and W. T. Martin, An unsymmetric Fubini theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 47(1941), 121-125.

[3] A. Halanay, Differential Equations Stability, Oscillations, Time Lags, Academic Press, 1966.

[4] J. K. Hale and J. Kato, Phase space for retarded equations with infinite delay, Funkcialaj Ekvacioj, 21(1978), 11-41.

[5] J. K. Hale, Retarded equations with infinite delays, Lecture Notes

in Math. vol. 730, Springer, 1979, 157-193.

[6] J. Kato, Remarks on linear functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, 12(1969), 89-98.

[7] J. Kato, 線型関数微分方程式系の基本行列について, 数理研講究録, 38(1968), 79-88.

[8] T. Naito, On linear autonomous retarded equations with an abstract phase space for infinite delay, J. Differential Equations, 33(1979), 74-91.

[9], T. Naito, Fundamental matrices of linear autonomous retarded equations with infinite delay, to appear in Tohoku Math. J.

[10] K. Schumacher, Existence and Continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay, Arch. Ration. Mech. Anal., 67(1977), 315-335.

[11] L. Schwartz, Cours d'analyse, I, Hermann, Paris, 1967.